

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng Δ có phương trình tổng quát $ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_M; y_M)$. Khoảng cách từ điểm M đến Δ là

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ví dụ 1: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau

a) $M(13; 14)$ và $\Delta: 4x - 3y + 15 = 0$;

b) $M(5; -1)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$.

Giải

a) Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là $d(M; \Delta) = \frac{|4 \cdot 13 - 3 \cdot 14 + 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$.

b) Δ qua điểm $A(7; -4)$ và nhận $\vec{a} = (-2; 3)$ làm VTCP nên nhận $\vec{n} = (3; 2)$ làm VTPT.

Do đó phương trình tổng quát của Δ là

$$3(x - 7) + 2(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 13 = 0$$

Vậy $d(M; \Delta) = \frac{|3 \cdot 5 + 2(-1) - 13|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0$.

b) Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ không nằm trên Δ .

Khi đó:

- M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$;
- M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các đỉnh là $A(1; 0)$, $B(2; -3)$, $C(-2; 4)$ và đường thẳng

$\Delta: x - 2y + 1 = 0$. Xét xem Δ cắt cạnh nào của tam giác.

Giải

Vì $(x_A - 2y_A + 1)(x_B - 2y_B + 1) = (1 - 2 \cdot 0 + 1)(2 - 2(-3) + 1) = 2 \cdot 9 > 0$ nên A và B nằm cùng phía đối với Δ . Suy ra Δ không cắt cạnh AB.

Vì $(x_A - 2y_A + 1)(x_C - 2y_C + 1) = (1 - 2 \cdot 0 + 1)(-2 - 2 \cdot 4 + 1) = 2 \cdot (-9) < 0$ nên A và C nằm khác phía đối với Δ . Suy ra Δ cắt cạnh AC.

Suy ra Δ cắt cạnh BC.

c) Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng cắt nhau có phương trình $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng đó có dạng

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với $A\left(\frac{7}{4}; 3\right)$, $B(1; 2)$, $C(-4; 3)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

Giải

$$\text{Ta có } \overline{AB} = \left(-\frac{3}{4}; -1\right), \overline{AC} = \left(-\frac{23}{4}; 0\right).$$

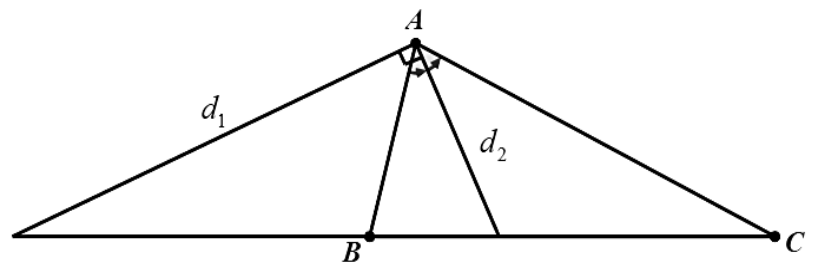
Các đường thẳng AB và AC có phương trình là $AB: 4x - 3y + 2 = 0$ và $AC: y - 3 = 0$.

Các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A có phương trình là

$$\frac{4x - 3y + 2}{5} + \frac{y - 3}{1} = 0 \text{ hoặc } \frac{4x - 3y + 2}{5} - \frac{y - 3}{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 13 = 0 \ (d_1) \text{ hoặc } 4x - 8y + 17 = 0 \ (d_2).$$

Nhận xét: Hai điểm B, C nằm cùng phía đối với đường phân giác ngoài và nằm khác phía đối với đường phân giác trong của góc A nên ta chỉ cần xét vị trí của hai điểm B, C đối với 1 trong hai đường d_1, d_2 .



Chẳng hạn đường phân giác d_1 , ta có $(4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 13) \cdot (4 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 - 13) = -5 \cdot (-23) > 0$ nên B, C nằm cùng phía đối với d_1 . Suy ra d_1 là đường phân giác ngoài của góc A.

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là $d_2: 4x - 8y + 17 = 0$.

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

Bài 1. Cho tam giác ABC với $A(3;-6)$, $B(2;3)$, $C(-1;0)$ và đường thẳng $\Delta: x-2y-3=0$. Xét xem Δ cắt cạnh nào của ΔABC .

Bài 2. Tìm khoảng cách từ $M(2;-1)$ đến các đường thẳng sau

a) $\Delta_1: x+y-3=0$.

b) $\Delta_2: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \end{cases}$.

c) $\Delta_3: \frac{x+2}{2} = \frac{3-y}{1}$.

Bài 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng sau

a) $d_1: -x+2y-3=0$ và $d_2: x-2y+1=0$.

b) $d_1: 2x+y=0$ và $d_2: 4x+2y+1=0$.

Bài 4. Tính bán kính của đường tròn có tâm $I(2;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 4x-3y+1=0$.

Bài 5. Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng

a) $\Delta_1: 2x+4y+7=0$ và $\Delta_2: x+1=0$.

b) $\Delta_1: -3x+4y+8=0$ và $\Delta_2: x-y+6=0$.

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC (tt)

2. Góc giữa hai đường thẳng

a) Định nghĩa

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b , hay đơn giản là góc giữa a và b . Kí hiệu là (a, b) hay (a, b) .

Khi a song song hoặc trùng với b , ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° .

Chú ý:

1/ Góc giữa hai đường thẳng không vượt quá 90° .

2/ Ta có:

- $(a, b) = (\vec{u}, \vec{v})$ nếu $(\vec{u}, \vec{v}) \leq 90^\circ$,
- $(a, b) = 180^\circ - (\vec{u}, \vec{v})$ nếu $(\vec{u}, \vec{v}) > 90^\circ$,

trong đó \vec{u}, \vec{v} lần lượt là vector chỉ phương của a và b .

3/ Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ được xác định bởi

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

b) Ví dụ

Ví dụ 1: Cho biết phương trình của hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt là

$$\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 3t' \end{cases}.$$

Tìm tọa độ vector chỉ phương của hai đường thẳng và tìm góc hợp bởi hai đường thẳng đó

Giải

Δ nhận $\vec{u} = (-2; -1)$ làm VTCP và Δ' nhận $\vec{u}' = (1; 3)$ làm VTCP.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $(\vec{u}, \vec{u}') = 135^\circ$. Vậy $(\Delta, \Delta') = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x = 5$ và $\Delta_2 : 2x + y - 14 = 0$. Tìm góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Giải

Đường thẳng Δ_1 có phương trình tổng quát là $x - 5 = 0$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $(\Delta_1, \Delta_2) \approx 26^\circ 34'$.

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

Bài 1. Tìm góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau

a) $\Delta_1: \begin{cases} x = 13 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = 7 + t' \end{cases}$.

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_2: 2x + 3y - 1 = 0$.

Bài 2. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng

a) $d_1: 7x - y - 4 = 0$ và $d_2: 3x - 4y + 3 = 0$.

b) $d_1: y = -3x + 2$ và $d_2: y = 2x - 5$.

Bài 3. Tìm a để góc tạo bởi hai đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và $3x + 4y + 12 = 0$ bằng 45° .